Valeurs d'adhérence

I Extractions.

Def : On appelle extraction toute application injective croissante strictement $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

ex : $2n, 2n+1, 2^n, 4^n, n!$

Props : φ, ψ des extractions.

1- $\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi(n) \geqslant n$: en effet $\varphi(0) \geqslant 0$ et si $\varphi(n) \geqslant n$ il vient $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$ donc $\varphi(n+1) \geqslant n+1$

2- Si $A \subset \mathbb{N}$ infinie il existe une extraction dans A ($\varphi(\mathbb{N}) = A$) [Voir Conds]

3- $\psi \circ \varphi$ est aussi une extraction

réc : $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k$ aussi

4- $\delta(n) = (\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n)(n)$ est une extraction

En effet si $n \in \mathbb{N}$, $\delta(n+1) = (\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n)(\varphi_{n+1}(n+1))$

$$\geqslant \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n (n+1)$$
$$> \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n(n) = \delta(n)$$

Suites extraites : Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$

Def On dit que $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est extraite de (u_n) si $\exists \varphi \nearrow \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_{\varphi(n)}$

Ex : $u_{2n}, u_{2n+1}, \dots$

Prop : Si v est extraite de u, alors w est extraite de u

D/ $\exists \varphi \nearrow \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ | $w_n = v_{\psi(n)}$

$\exists \psi \nearrow \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $w_n = v_{\psi(n)}$ | $= u_{\varphi(\psi(n))}$

REC Vext extractrice de u avec φ_i $i=1..n$
Vnext extractrice de u avec $\varphi_1 \dots \varphi_n$

Traductions : (1) $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, non bornée
Par ex u_n non majorée $\forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N} \; u_n \geq N$

Par réc on construit $\varphi \nearrow \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{\varphi(n)} \geq n$

$\exists n_0 : u_{n_0} \geq 0$ $n_0 = \varphi(0)$

$\varphi(1) \dots \varphi(n)$ construits, il existe une infinité de m tq $u_m \geq (n+1)$ [sinon u_n majorée]

et on pose $\varphi(n+1) = m$.

(2) Soit $u_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \not\to 0$

$\exists \delta > 0 \; \exists \varphi \nearrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{\varphi(n)} \geq \delta$

D/ $(u_n) \not\to 0$ se traduit par (u_n) étant positive, $\exists \delta > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \geq N$, $u_n \geq \delta$ / nég de la convergence

$\{n, u_n \geq \delta\}$ est non majoré donc infini

$\exists \varphi \nearrow \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\varphi(\mathbb{N}) = A$

ie $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) \geq \delta$

(3) $q_n \in A^{\mathbb{N}}$ si $q_m \not\to$ ∞ $\exists \varphi \nearrow \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
tq $(q_{\varphi(n)})$ constante

D/ trad de l'hypothèse $\exists M>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N\ q_n<M$.

$A=\{n\in\mathbb{N} \mid 0\leq q_n\leq M\}$ est infini

Soit $A_k=\{n\in A \mid q_n=k\}$ $k=0,\dots,[M]$

$\bigcup_{k=0\dots[M]} A_k = A$ infini donc $\exists k_0$, A_{k_0} est infini

Soit $\varphi \nearrow \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tq $\varphi(\mathbb{N})=A_{k_0}$

II Valeurs d'adhérence

Soit $(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ **Déf** : (Th-Déf) Soit $a\in\mathbb{C}$:

S'équivalent :

1. $\forall\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n\geq N : |u_n-a|<\varepsilon$
2. $\forall\varepsilon>0\ \{n\in\mathbb{N},\ |u_n-a|<\varepsilon\}$ est infini
3. $\exists\varphi\nearrow \mathbb{N}\to\mathbb{N}\ u_{\varphi(n)}\to a$

Si a vérifie l'une d'entre elles on dit que a est une v.a

D/ ② $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \{N\in\mathbb{N} \mid |u_n-a|<\varepsilon\}$ est non majoré $\Leftrightarrow$ ①

③ $\Rightarrow$ ② car $u_{\varphi(n)}\to a$ (l'écrire...)

② $\Rightarrow$ ③ $\varepsilon=\frac{1}{m+1}$ pour tout $m\in\mathbb{N}$: $A_{m+1}=\{n\in\mathbb{N},\ |u_n-a|<\frac{1}{m+1}\}$

on construit $\varphi\nearrow\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ \forall\ m\in\mathbb{N}\ |u_{\varphi(m)}-a|<\frac{1}{m+2}$

on choisit $\varphi(0)\in A_1$, $\varphi(1)\in A_2,\dots,\varphi(m)\in A_{m+1}$?

Supposons $\varphi(0)<\dots<\varphi(m)$ construits $|u_{\varphi(k)}-a|<\frac{1}{k+2}$

A_{m+2} infini donc $\exists n\in A_{m+2} : n>\varphi(m)$

$\varphi(m+1)=n$ OK.

opt $(n \mapsto n)$ VA $= \mathbb{R}$?

Exemples : ① $u_n = (-1)^n$ $\quad adh(u_n) = \{-1, 1\}$

Si $a \notin \{-1, 1\}$ $\varepsilon = \min\{|a+1|, |a-1|\}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n - a| \geq \frac{\varepsilon}{2}$: a n'est pas une V.A

② (u_n) est T-périodique, $T \in \mathbb{N}^*$. Alors

$adh = \{u_0, \dots, u_{T-1}\}$

(⊃) Si $k \in [\![0, T-1]\!]$, $u_k = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{k+nT}$

(⊂) $a \notin \{u_0 \dots u_{T-1}\}$, $\varepsilon = \min\{|a - u_k|, k \in [\![0, T-1]\!]\}$

$\{n \in \mathbb{N}, |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\} = \emptyset$ donc a n'est pas une VA ($a \notin adh(u_n)$)

③ $u_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

u_n est non minorée par un réel > 0 ssi 0 est VA.

(⇐) Il existe φ ↗ $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $u_{\varphi(n)} \to 0$. OK

(⇒) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n < \varepsilon$ OK

④ Donner une suite (u_n) tq $adh(u_n) = \mathbb{R}$

On se ramène à $\mathbb{Q}$: $u : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ une surjection

soit $a \in \mathbb{R}$ si $\varepsilon > 0$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ $|r - a| < \varepsilon$

$n \in \mathbb{N}$ $r = u_n$ alors $u_n \to$ ... $\in Adh(u_n)$

Prop : Soit $u_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, si $u_n \to l$ alors

1/ $l \in Adh(u_n)$: Clair, si φ ↗, $\varepsilon > 0$

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$ $|u_n - l| < \varepsilon$ | Pour $n \geq n_\varepsilon$, $\varphi(n) \geq n \geq n_\varepsilon$

② u_n ... u_n ...

40

donc $|u_{\varphi(m)} - l| \leq \varepsilon$ $\quad u_{\varphi(m)} \to l$

III BW

<u>TH</u> Soit $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée, elle possède au moins une VA

D/ <u>Lemme</u> : si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (u_n) possède une sous suite monotone

D/ soit $A = \{n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, u_n \geq u_k\}$

<u>1er cas</u> : A est infini

$\exists \varphi \nearrow \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\varphi(\mathbb{N}) = A$ soit $n \in \mathbb{N}$

$\varphi(n) \in A$ et $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc $u_{\varphi(n)} \geq u_{\varphi(n+1)}$

DÉF de A

<u>Bref</u> $u_{\varphi(n)} \searrow$

2 - A est fini : $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N$ $n \notin A$

ie $\forall n \geq N, \exists k > n, u_n < u_k$

On se donne $\varphi(0) > N : \exists k > \varphi(0), u_k > u_{\varphi(0)}$

on pose $k = \varphi(1)$, $\varphi(1) > N$ donc $\exists k' > \varphi(1)$

$u_{k'} > u_{\varphi(1)}$, $k = \varphi(2)$ ...

On construit $\varphi \nearrow \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $u_{\varphi(n)} \nearrow$ $(\nearrow\nearrow)$

Donc on prend ou suit $u_{\varphi(n)}$ monotone bornée donc converge

RP: Si (u_n) est non bornée elle possède une sous suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

Extension à $\mathbb{C}$: on prend $z_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, bornée,

$z_n = x_n + iy_n$

x_n et y_n sont bornées

$\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ $x_{\varphi(n)} \to \alpha$ BW

on regarde $y_{\varphi(n)}$ (bornée) $\exists \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$y_{\varphi\circ\psi(n)} \to \beta$ | $z_{\varphi\circ\psi(n)} \to \alpha + i\beta$

Th: Soit $z_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, bornée. Alors (z_n) CV

$\Leftrightarrow (z_n)$ possède au plus une VA

D/ $\Rightarrow$ clair

$\Leftarrow$ d'après BW z_n possède une VA

Soit a

Si $z_n \not\to a$: $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq N$

$|u_n - a| > \varepsilon$. Delà $\{n \in |u_n - a| > \varepsilon\}$

est non majoré donc infini

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi(\mathbb{N}) = A$

il vient alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z_{\varphi(n)} - a| > \varepsilon$

$z_{\varphi(n)}$ est bornée comme z_n, bornée donc $\exists \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\exists b \in \mathbb{C}$ $z_{\varphi\circ\psi(n)} \to b$

$b \neq a$

avec $(\star)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z_{\varphi \circ \psi(n)} - a| \geq \varepsilon$ donc

$|a - b| \geq \varepsilon$ $a \neq b$ Abs $\lightning$

XIV Compléments :

Déf : Une partie F de $\mathbb{R}$ est dite fermée lorsque $\mathbb{R} \setminus F$ est ouvert

Ex : intervalles fermés, ensemble fini

Th : F est fermé

$\Updownarrow$

$\forall (x_n) \in F^{\mathbb{N}} \left((x_n) \to \ell \Rightarrow \ell \in F \right)$

$\Downarrow$ raisonnons par l'abs : si $\begin{vmatrix} (x_n) \in F^{\mathbb{N}} \\ (x_n) \to \ell \notin F \end{vmatrix}$ $\mathbb{R} \setminus F$ étant ouvert

$\exists \varepsilon > 0$ tq : $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus F$

or $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ABS $(\lightning)$

$\Uparrow$ Supposons F non fermé : $\mathbb{R} \setminus F$ non ouvert

ie : $\exists \ell \in \mathbb{R} \setminus F$ $\forall \varepsilon > 0$, $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\not\subset \mathbb{R} \setminus F$

ie $\forall \varepsilon > 0$ $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\cap F \neq \emptyset$

$\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ il existe $x_n \in F$ tq $\ell - \frac{1}{n+1} < x_n < \ell + \frac{1}{n+1}$

(C) $(x_n) \to \ell$, $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$

Th (HP, peut-être) : Soit (u_n) une suite réelle

1. Adh (u_n) est fermé
2. Si u_n est bornée, Adh contient sa borne inf ($\liminf u_n$) et sa borne sup [$\limsup$]

D/

1- supposons $l \in \mathbb{R}$, $l \notin Adh$

$\exists \varepsilon > 0$ $\{n \in \mathbb{N}, |u_n - l| < \varepsilon\}$ est fini

Si $l' \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$, il existe $\delta > 0$

$(\delta = \min |l' - (l-\varepsilon)|, |l' - (l+\varepsilon)|)$

tq $]l'-\delta, l'+\delta[\subset]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$

alors $\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - l'| < \delta\}$ est fini

$l' \notin adh(u_n)$ $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subset \mathbb{R} - Adh(u_n)$

Lemme:

① Si F est fermé, borné $\neq \emptyset$, inf F et sup F $\in$ F

D/ sup F est limite d'une suite (x_n) de pts de F. Or F est fermé sup F $\in$ F

Mini-projet Ex: Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée tq $x_{n+1} - x_n \to 0$

alors adh(x_n) est un segment [lim inf, lim sup]

S/ On doit Mq Adh(u_n) est convexe

Soit $(\gamma, \delta) \in Adh(x_n)^2$ avec $\gamma < \delta$

et $x \in]\gamma, \delta[$

Soit $\varepsilon > 0$ avec $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]\gamma+\varepsilon, \delta-\varepsilon[$

(SNG) ; soit $N \in \mathbb{N}$

il existe $n_\varepsilon \geq N$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$ et $m \geq n_\varepsilon$ $|x_m - x_n| < \varepsilon$ (hyp)

σ est une VA il existe $n_1 \geq \max(n_\varepsilon, N)$ tq

$x_{n_1} \in]\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon[$

δ est une VA — $n_2 > n_1$ tq $x_{n_2} \in]\delta - \varepsilon, \delta + \varepsilon[$

Soit $B = \{k \in [\![n_1, n_2 - 1]\!] \mid x_k < \sigma - \varepsilon, B \neq \emptyset\}$;
$B \neq \emptyset$ car $x_{n_1} \in B$

On sait alors que $n_2 \notin B$. Posons $n = \max(B)$ $(< n_2)$

alors $\begin{cases} |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \\ x_n < \sigma - \varepsilon \leq x_{(n+1)} \notin B \end{cases}$ $\swarrow$: $x_{n+1} \in [\sigma - \varepsilon, x_n]$

$n+1 > N$

Suites de Cauchy:

Def : une suite $z_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si elle vérifie
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \; \substack{m \geq n_\varepsilon \\ n \geq n_\varepsilon} \; |z_m - z_n| < \varepsilon$

autre expr : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \; n \geq n_\varepsilon \; |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$

Rem : p, n et m, n et p sont indépendants
$\Rightarrow$ Pas de notion de limite pour l'instant

Negation : $\exists \delta > 0, \forall N \in \mathbb{N} \; \exists \substack{n > N \\ m > N}$ $|z_n - z_m| \geq \delta$

$\rightarrow$ On trouve une extraction φ tq : $\forall n$ $|z_{\varphi(n)} - z_{\psi(n)}| \geq \delta$
(ex. ...)

Bien évidemment, s'il existe φ ? $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z_{\varphi(n)} - z_{\varphi(n)}| \geq \delta$ (z_n) n'est pas de Cauchy

Props : 1) (z_n) est de Cauchy $|z_{n+1} - z_n| \to 0$

$|z_{2n+1} - z_n| \to 0$

⚠ Réciproque $z_n = \log n$ $|z_{2n} - z_n| \to \log 2$

Ex : On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z_{n+1} - z_n| < \frac{1}{2^n}$

Mq z_n est de Cauchy

Soit $\varepsilon > 0$: Si $m, n > N$ $|z_m - z_n| \leq \left|\sum_{k=n}^{m-1} |z_{k+1} - z_k|\right|$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{1}{2^k}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \cdot 2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

donc il suffit de fixer N tq $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$

et donc $\forall m > n > N$ $|z_m - z_n| < \varepsilon$

2) Si (z_n) converge, elle est de Cauchy

D/ Soit $\varepsilon > 0$, Soit $l = \lim_{n \to +\infty} z_n$ Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq : $\forall n \geq n_\varepsilon$ $|z_n - l| \leq \varepsilon$, de là

si $m, n > n_\varepsilon$

$$|z_m - z_n| \leq |z_m - l| + |z_n - l| \leq 2\varepsilon$$

3. z_n est de Cauchy, elle est bornée

$\varepsilon = 1$ Soit N $\forall m \geq n \geq N$ $|z_m - z_n| \leq 1$

il vient $\forall n \geq N$ $|z_n - z_N| \leq 1$

et donc $|z_n| \leq 1 + |z_N|$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z_n| \leq \max(|z_1|, \dots, |z_{N-1}|, 1 + |z_N|)$

4. Soit (z_n) une suite de Cauchy. si (z_n) possède une v.a alors elle converge.

Dém : Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗ et $\ell \in \mathbb{C}$ $z_{\varphi(n)} \to \ell$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ | Cauchy $\forall k, \ell \geq n_\varepsilon$ $|z_k - z_\ell| \leq \varepsilon$

$z_{\varphi(n)} \to \ell$; $\forall n \geq n_\varepsilon$ $|z_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$

Soit $N = \varphi(n_\varepsilon)$, $N \geq n_\varepsilon$ | Si $m \geq N$, il vient

$|z_m - \ell| \leq |z_m - z_N| + |z_N - \ell|$

$\leq \varepsilon + \varepsilon$

Th : Soit $z_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (z_n) converge $\Updownarrow$ (z_n) est de Cauchy

D/ (↓) déjà vu

(↑) (z_n) de Cauchy donc elle est bornée (3)

BW $\Rightarrow$ (z_n) possède une valeur d'adh

$\overset{4}{\Rightarrow}$ (z_n) converge

Intégrales généralisées (impropre)

Préambule